Lógica
Matemática
11 Teorema da dedução ■

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br

Motivação

O procedimento de prova em um sistema formal envolve geralmente um trabalho mecânico trabalhoso.

Uma forma de minimizar este trabalho é, na prova de um teorema, utilizar um outro teorema já provado, evitando repetir a sequência de fórmulas novamente (está de acordo com a prática matemática).

Outra forma é utilizarmos alguns metateoremas, que funcionam como regras de dedução adicionais.

Relembrando... Dedução a partir de um conjunto de fórmulas

Seja Γ um conjunto de fbf's de $\mathcal{L}$ (que não necessariamente precisam ser axiomas ou teoremas). Uma sequência $A_1, A_2, \dots, A_n$ de fbf's de $\mathcal{L}$ é uma dedução a partir de Γ se, para cada i, $1 \leq i \leq n$, uma das três seguintes opções acontece:

a) A_i é um axioma de $\mathcal{L}$,

b) A_i é um elemento de Γ ou

c) A_i é conclusão obtida de fórmulas anteriores por meio de uma regra de inferência do sistema (no nosso caso, MP).

Teorema da dedução

TEOREMA 1 (da dedução): Se $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} B$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to B)$, em que A e B são fbf's de $\mathcal{L}$ e Γ é um conjunto de fbf' de $\mathcal{L}$ (possivelmente vazio).

Demonstração:

A demonstração é por indução no número de fórmulas da sequência que compõe a dedução de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$.

TEOREMA 1 (da dedução): Se $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} B$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \rightarrow B)$, em que A e B são fbf's de $\mathcal{L}$ e Γ é um conjunto de fbf' de $\mathcal{L}$ (possivelmente vazio).

Demonstração:

Caso base:

A dedução de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ é uma sequência de uma (1) fórmula.

Nesse caso, essa única fórmula só pode ser B.

De acordo com a definição de dedução, ou B é um axioma ou $B \in \Gamma \cup \{A\}$.

(a) B é um axioma de $\mathcal{L}$.

Então, temos a seguinte dedução de B:

TEOREMA 1 (da dedução): Se $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} B$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \rightarrow B)$, em que A e B são fbf's de $\mathcal{L}$ e Γ é um conjunto de fbf' de $\mathcal{L}$ (possivelmente vazio).

Demonstração:

Caso base:

1	B	Axioma de $\mathcal{L}$
2	$(B \rightarrow (A \rightarrow B))$	Axioma L1
3	$(A \rightarrow B)$	1,2 MP

Logo, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \rightarrow B)$.

TEOREMA 1 (da dedução): Se $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} B$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \rightarrow B)$, em que A e B são fbf's de $\mathcal{L}$ e Γ é um conjunto de fbf' de $\mathcal{L}$ (possivelmente vazio).

Demonstração:

Caso base:

(b) $B \in \Gamma$.

Neste caso, também podemos concluir que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \rightarrow B)$:

1	B	$B \in \Gamma$
2	$(B \rightarrow (A \rightarrow B))$	Axioma L1
3	$(A \rightarrow B)$	1,2 MP

TEOREMA 1 (da dedução): Se $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} B$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \rightarrow B)$, em que A e B são fbf's de $\mathcal{L}$ e Γ é um conjunto de fbf' de $\mathcal{L}$ (possivelmente vazio).

Demonstração:

Caso base:

(c) $B \in \{A\}$, ou seja, $B = A$. Neste caso, também podemos concluir que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (B \rightarrow B)$:

1	$\left(B \rightarrow ((B \rightarrow B) \rightarrow B)\right) \rightarrow \left((B \rightarrow (B \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow B)\right)$	L2
2	$\left(B \rightarrow ((B \rightarrow B) \rightarrow B)\right)$	L1
3	$\left((B \rightarrow (B \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow B)\right)$	1,2 MP
4	$\left(B \rightarrow (B \rightarrow B)\right)$	L1
5	$(B \rightarrow B)$	3,4 MP

TEOREMA 1 (da dedução): Se $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} B$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to B)$, em que A e B são fbf's de $\mathcal{L}$ e Γ é um conjunto de fbf' de $\mathcal{L}$ (possivelmente vazio).

Demonstração:

Hipótese indutiva (HI):

Seja $n > 1$. O resultado vale para uma dedução de C a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ que contém uma sequência de k fórmulas, com $k \leq n$.

Tese: O resultado vale para uma dedução de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ que contém uma sequência de $n + 1$ fórmulas.

A única mudança em relação ao caso base é que agora B pode ser resultado da aplicação de MP em fórmulas anteriores.

TEOREMA 1 (da dedução): Se $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} B$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \rightarrow B)$, em que A e B são fbf's de $\mathcal{L}$ e Γ é um conjunto de fbf' de $\mathcal{L}$ (possivelmente vazio).

Demonstração:

Suponha que B é conclusão de fórmulas anteriores por meio da aplicação de MP.

Essas fórmulas anteriores devem ter a forma C e $(C \rightarrow B)$.

Como elas são anteriores à B, temos que $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$ e $\Gamma \cup \{A\} \vdash (C \rightarrow B)$, ou seja,

elas são fórmulas cuja dedução possui um número menor ou igual a n de fórmulas. Logo, vale a Hipótese Indutiva:

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \rightarrow C)$ e $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \big(A \rightarrow (C \rightarrow B)\big)$.

Vamos mostrar como podemos deduzir $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ:

Demonstração:

1		
2		
$\vdots$		
k	$(A \rightarrow C)$	Dedução de $(A \rightarrow C)$ a partir de Γ (linhas 1 a k)
$k+1$		
$\vdots$		
l	$(A \rightarrow (C \rightarrow B))$	Dedução de $A \rightarrow (C \rightarrow B)$ a partir de Γ (linhas $k+1$ a l)
$l+1$	$(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$	L2
$l+2$	$((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$	$l, l+1$ MP
$l+3$	$(A \rightarrow B)$	$k, l+2$ MP

(Meta)Teorema da dedução

TEOREMA 1 (da dedução): Se $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} B$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to B)$, em que A e B são fbf's de $\mathcal{L}$ e Γ é um conjunto de fbf' de $\mathcal{L}$ (possivelmente vazio).

Demonstração:

Portanto, demonstramos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to B)$.

Pelo princípio da indução matemática, segue que o resultado vale para qualquer número de fórmulas que compõem a dedução de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$. ■

Observação final

É possível demonstrarmos que vale a recíproca do teorema da dedução, isto é se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \rightarrow B)$, então $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} B$, em que A e B são fbf's de $\mathcal{L}$ e Γ é um conjunto de fbf' de $\mathcal{L}$ (possivelmente vazio).

Demonstração:

Fica como exercício.

11 *Teorema da Dedução* ▪

numeroimaginario.com.br
vinicius@numeroimaginario.com.br